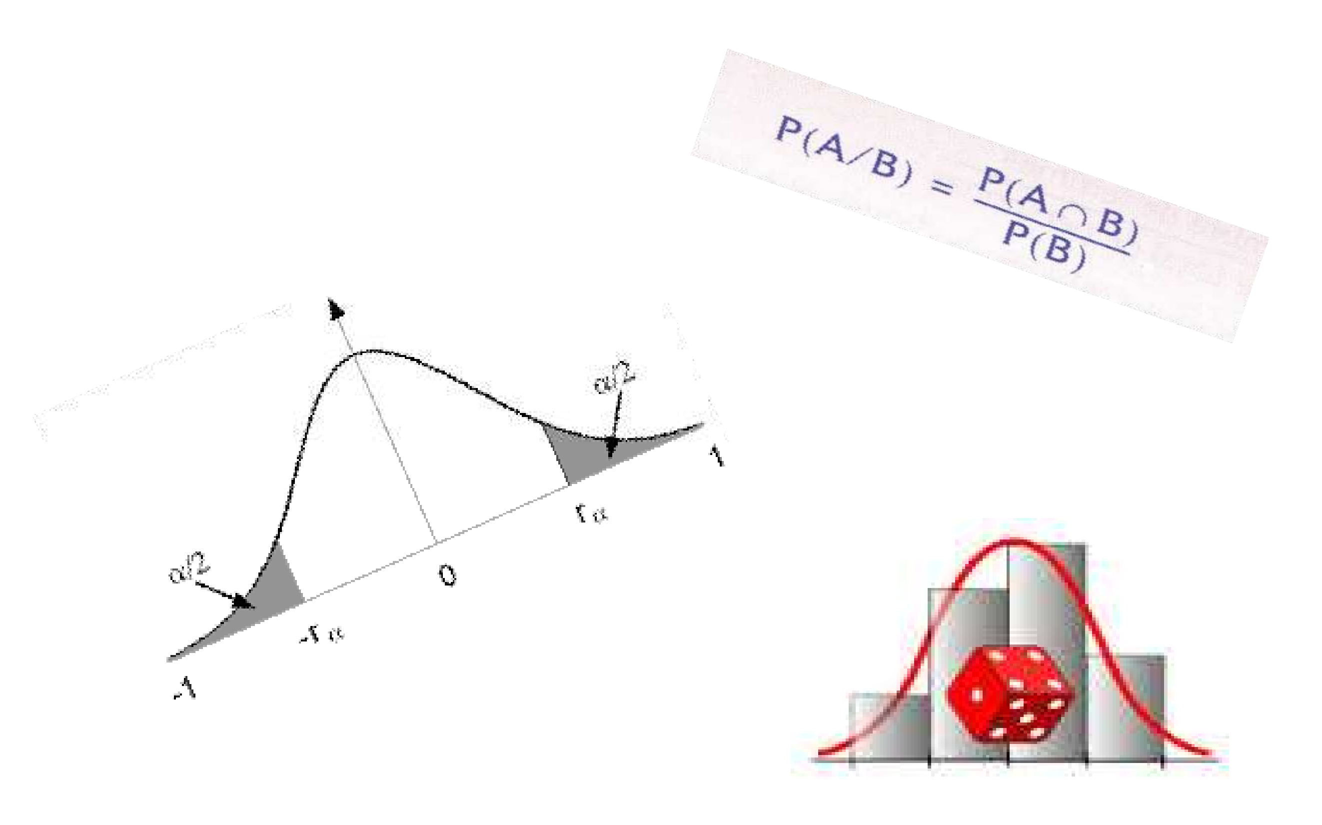
PROBABILITES

Cours et exercices

Mr. AHBLI Mustapha

GROUPE EXCELLENCE TANGER

20/03/2015



SOMMAIRE

I- Le modèle probabiliste

1. Evènements

Etant donnée une expérience aléatoire, on note **Ω** l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience.

Un singleton de **Ω** est appelé évènement élémentaire.

Un sous-ensemble A de **Ω** est appelé un évènement. Un évènement A est donc un ensemble constitué de résultats possibles de l'expérience. Si le résultat d'une expérience est dans A, on dit que A est réalisé.

Exemple 1-2 : Sept étudiants doivent passer un oral d'examen. On leur distribue un numéro d'ordre. On pose :

Ω = {tous les alignements des sept lettres a, b, c, d, e, f, g}

Le résultat cfabdeg signifie que l'étudiant c est le premier, a le second, ...

L'ensemble des arrangements qui commencent par cf est un évènement.

Dans le cadre de la théorie des probabilités, un évènement est généralement défini comme l'ensemble des résultats ayant une propriété donnée. La plupart du temps, l'ensemble A est noté comme la propriété qui le définit. Donnons quelques exemples de telles assimilations :

Ω : évènement certain

Ø : évènement impossible

A ∪ B : évènement (A ou B)

A∩B : évènement (A et B)

$\boldsymbol{A^C}$: (Non A), évènement contraire de A

A∩B = Ø : les évènements A et B sont incompatibles

Exercice : Soit **Ω** l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire, et soient A, B et C des évènements. Traduire en termes ensemblistes les évènements :

a) les trois évènements A, B et C sont réalisés

b) aucun des évènements A, B ou C n'est réalisé

c) au moins un des évènements est réalisé

d) deux au plus des évènements est réalisé

2. Loi de probabilité, espace de probabilité

Définition : Soit **Ω** un ensemble. Une loi de probabilité P sur **Ω** est une fonction qui à tout évènement A associe un nombre réel P(A), et qui a les trois propriétés :

a) $0 \leq P(A) \leq 1$,

b) P (Ω) = 1

c) Pour toute famille finie ou dénombrable $(An)_{n\in I}$ d'évènements deux à deux disjoints :

$P(\bigcup_{n\in I} An) = \sum_{n\in I} P(An)$.

(Ω, P) s'appelle un espace de probabilité.

Exemple : On lance un dé et on observe la face du dessus. On posera :

Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} et on supposera que le dé est parfaitement équilibré, de sorte que la probabilité de chaque face est la même :

$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$

Remarquons qu'alors, la probabilité de tout évènement est calculable en utilisant la propriété c) de la définition. Par exemple, comme {1, 3, 4} est la réunion des trois ensembles 2 à 2 incompatibles {1}, {3} et {4}, on a :

$P(\{1, 3, 4\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Exercice: Soit (Ω, P) un espace de probabilité.

a) Si A est un évènement de probabilité P(A) connue, que vaut $P(A^c)$?

b) Si $A \subset B$, comparer P(A) et P(B).

c) Calculer P (A ou B) en fonction de P (A et B), P(A) et P(B).

d) Montrer que P (A ou B) ≤ P(A) + P(B). Généraliser cette inégalité à un nombre fini d'évènements.

3. Le cas où les évènements élémentaires sont équiprobables

Soit (Ω, P) un espace de probabilité correspondant à une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats possibles est fini :

$\Omega = \{\omega 1, \omega 2, ..., \omega n\}$

Supposons que chaque résultat "a autant de chances d'être réalisé qu'un autre", soit, en termes probabilistes, que P est telle que :

$P(\{\omega 1\}) = P(\{\omega 2\}) = ... = P(\{\omega n\})$

Comme la somme de ces n nombres est 1, leur valeur commune est égale à 1/n. Soit maintenant un évènement A. Sa probabilité est :

$P(A) = \sum_{k / \omega k \in A} P(\{\omega k\}) = \text{card}(A) . \frac{1}{n} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

Cette loi de probabilité est souvent appelée loi uniforme sur Ω. Calculer des probabilités par une méthode directe dans ce cas revient donc à dénombrer des ensembles.

Exercice : 20 sujets sont au programme d'un oral d'examen. Le candidat tire au sort 3 de ces sujets et traite l'un de ces trois. Combien doit-il avoir révisé de sujets pour avoir au moins 9 chances sur 10 de pouvoir traiter un sujet qu'il a révisé ?

4. Exercices

Exercice 1: Soit (Ω, P) un espace de probabilité, et soient A et B deux évènements.

Montrer que si P(A) = P(B) = 0,9, alors, $P(A \cap B) \geq 0{,}8$.

Dans le cas général, montrer que $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

Exercice 2 : Deux personnes sont tirées au sort dans un groupe de 30 composés de 10 femmes et 20 hommes. Avec quelle probabilité ces deux personnes sont-elles des hommes ? Avec quelle probabilité sont-elles des femmes ?

Exercice 3 : Un tiroir contient en vrac les 20 chaussettes de 10 paires différentes. On en sort au hasard 4 chaussettes. Avec quelle probabilité obtient-on :

a) 2 paires

b) au moins une paire

II- Probabilités conditionnelles

1. Définition

Lançons un dé parfaitement équilibré. Un bon modèle probabiliste en est donné par :

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

muni de la loi de probabilité P uniforme.

Notons **A** l'évènement **"le dé donne au moins 4 points"** et **B** l'évènement **"le résultat est impair"**. Supposons qu'on ne retienne le résultat du lancer que s'il est dans B. Dans cette nouvelle expérience, l'évènement A est réalisé quand on obtient un 5, et c'est avec la probabilité relative $\frac{P(\{5\})}{P(\{1,3,5\})} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$. Plus généralement la probabilité relative de A sous la condition que B est réalisé est $\frac{\mathbf{P(A\ et\ B)}}{\mathbf{P(B)}}$. On l'appelle aussi probabilité de A sachant que B, ou probabilité conditionnelle de A relative à B, etc.…

Définition : Soit (Ω, P) un espace de probabilité, et soit B un évènement tel que $P(B) \neq 0$. La probabilité de A sachant que B est notée P (A | B), et est définie par :

$$\mathbf{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Exercice : Lançons un dé parfaitement équilibré. Un bon modèle probabiliste en est donné par : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Muni de la loi de probabilité P uniforme.

Notons **A** l'évènement **"le dé donne au moins 3 points"** et **B** l'évènement **"le résultat est pair"**.

2. Deux résultats de décomposition

Les deux résultats de ce paragraphe utilisent "à l'envers" la définition de probabilité conditionnelle, c'est-à-dire donnent un moyen de calcul de probabilités connaissant des probabilités conditionnelles. Ils sont très utiles dans la pratique.

Exemple : Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. Une personne tire une boule et la garde, une deuxième personne tire une boule. Avec quelle probabilité les deux boules tirées sont-elles blanches ? On peut répondre à cette question en utilisant la définition de probabilité conditionnelle. En effet, notons A l'évènement "la première personne a tiré une boule blanche" et B l'évènement "la deuxième personne a tiré une boule blanche". D'après la définition, P (A et B) = P (B | A) P(A). Mais P(A) est connue, c'est 2/3. P (B | A) est aussi connue : c'est 1/2 car, la première personne ayant tiré une boule blanche, la deuxième personne tire une boule au hasard dans une urne qui contient une boule blanche et une boule noire. Ainsi, P (A et B) vaut (2/3).(1/2) = 1/3.

Proposition : Soit (Ω, P) un espace de probabilité, et soient A1, A2,…, An des évènements. On a :

P (An et An-1 et… et A1) =

P (An | An-1 et… et A1) P (An-1 | An-2 et… et A1) … P (A2 | A1) P(A1).

Cet énoncé est constamment utilisé dans le contexte des "chaînes de Markov", qui interviennent naturellement dans les problèmes concrets où A1, A2,…, An représente une succession (temporelle) d'évènements, la probabilité de réalisation du n-ième évènement An étant conditionnée par "le passé" (probabilité sachant que A1 et … et An- ont eu lieu).

Proposition : Soit (Ω, P) un espace de probabilité, et soient C1, C2, …, Cn n évènements deux à deux disjoints et dont la réunion est l'ensemble de tous les résultats possibles **Ω**. En termes ensemblistes, {C1, C2, …, Cn} est donc une **partition** de **Ω** ; en termes probabilistes, on l'appelle un **système complet d'évènements.** Soit A un évènement. On a bien sûr :

A = (A ∩ C1) (A ∩ C2) … (A ∩ Cn) et les ensembles (A ∩ C1), (A ∩ C2), …, (A∩ Cn) sont deux à deux disjoints. Ainsi :

P (A) = P (A ∩ C1) + P (A ∩ C2) + … + P (A∩ Cn)

=P (A | C1) P (C1) + P (A | C2) P (C2) + … + P (A | Cn) P (Cn)

Exercice : En mars 1994 (enquête sur l'emploi INSEE 1994), la population active en France comprend 44,7% de femmes. Le taux de chômage chez les hommes est 10,8% ; il est chez les femmes 14,3%. On tire au sort une personne parmi les actifs.

a) Avec quelle probabilité est-elle au chômage ?

b) Sachant qu'elle est au chômage, avec quelle probabilité est-ce une femme ?

3. Evènements indépendants

Il est naturel de poser que, du point de vue de leur probabilité de réalisation, deux évènements A et B sont indépendants si le fait de savoir que B est réalisé n'apporte pas d'information sur les chances de réalisation de A, c'est-à-dire si la probabilité de A sachant que B est égale à P(A), et donc si $P(A \cap B) = P(A).P(B)$. Posons pour définition plus générale la suivante :

Définition : Soit (Ω, P) un espace de probabilité, et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements. On dit que ces évènements sont indépendants dans leur ensemble si, quelle que soit la partie finie J de I, $P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j)$.

Exercice :

a) Montrer que si A et B sont indépendants, A et B^c, A^c et B, A^c et B^c le sont aussi.

b) Deux évènements A et B incompatibles sont-ils indépendants ?

4. Exercices

Exercice 1: Avec quelle probabilité une famille de 3 enfants comporte-t-elle au moins un garçon ?

Exercice 2 : Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l'un d'eux se trouve de la nourriture qu'il aime, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience élémentaire est répétée jusqu'à ce que le rat trouve le bon couloir. Sous chacune des hypothèses suivantes :

(H1) le rat n'a aucun souvenir des expériences antérieures,

(H2) le rat se souvient de l'expérience immédiatement précédente,

(H3) le rat se souvient des deux expériences précédentes, avec quelle probabilité la première tentative réussie est-elle la k-ième ?

Exercice 3 : Pour décider d'un traitement thérapeutique, on utilise un test qui est positif 99 fois sur 100 si une personne est effectivement malade. Mais si une personne n'est pas malade, le test est positif une fois sur 100. On sait par ailleurs que 5 personnes sur 100 ont cette maladie.

a) Si le test d'une personne est positif, avec quelle probabilité cette personne est-elle effectivement malade ?

b) Si le test d'une personne est négatif, avec quelle probabilité cette personne n'est-elle effectivement pas malade ?

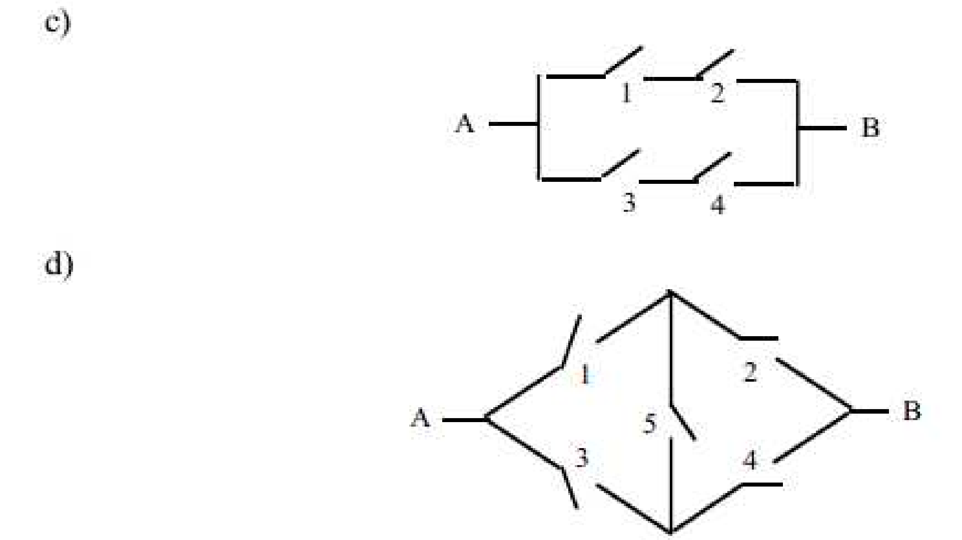
Calculer ces probabilités quand on sait que 5 personnes sur 1000 ont cette maladie.

Exercice 4 : La probabilité de fermeture du relai i des circuits décrits ci-dessous est pi.

Tous les relais fonctionnent indépendamment. Dans chacun des cas suivants, quelle est la probabilité pour que le courant passe entre A et B ?

a) A et B sont séparés par n relais reliés en série.

b) A et B sont séparés par n relais reliés en parallèle.



Exercice 5 : Un candidat d'un jeu télévisé américain est face à trois portes. Derrière l'une d'elles se trouve le prix, - une voiture -. Le candidat se place devant la porte de son choix. Le présentateur de l'émission, qui lui sait où se trouve la voiture, ouvre alors l'une des deux autres portes et indique au candidat que la voiture ne s'y trouve pas. Le candidat peut à son tour ouvrir une porte. S'il découvre la voiture, il la gagne.

Un candidat décide d'adopter l'une des trois stratégies suivantes :

a) ouvrir la porte devant laquelle il s'est placé à l'issu de son premier choix,

b) ouvrir l'autre porte,

c) tirer à pile ou face et, s'il obtient pile, ouvrir la porte devant laquelle il s'est placé à l'issu de son premier choix, ouvrir l'autre porte s'il obtient face.

L'une de ces trois stratégies est-elle préférable aux autres ?

III- Variables aléatoires : généralités

1. Définitions

Une variable aléatoire X est une variable associée à une expérience ou à un groupe d'expériences aléatoires et servant à caractériser le résultat de cette expérience ou de ce groupe d'expériences.

On distingue les variables aléatoires discontinues ou discrètes et les variables aléatoires continues.

2. Variable aléatoire discontinue

2.1. Définition

Une variable aléatoire est discrète si elle varie de façon discontinue, la variable ne peut prendre que des valeurs entières.

Exemple :

- Soit X la variable aléatoire qui caractérise le résultat de l'expérience aléatoire "jet d'un dé homogène".

X est une variable aléatoire discrète, elle peut prendre les valeurs entières 1, 2, 3, 4, 5, et 6.

- Soit X la variable aléatoire qui caractérise le nombre de garçons dans une famille de quatre enfants.

X est une variable aléatoire discrète, elle peut prendre les valeurs entières 0, 1, 2, 3, et 4.

2.2. Distribution de probabilité

À chacune des valeurs x que peut prendre une variable aléatoire X, correspond une probabilité p(x), c'est la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur x :

$p(x) = p(X = x)$

L'ensemble des valeurs admissibles x et des probabilités correspondantes p(x) constitue une distribution de probabilité discontinue. La relation entre x et p(x) est appelée loi de probabilité.

Pour toutes les distributions de probabilités dont les valeurs x correspondent à des événements complémentaires, le total des probabilités est égal à 1.

$$\sum p(x)=1$$

La distribution cumulée des probabilités est appelée fonction de répartition :

$F(x) = p(X \leq x) = \sum^{x} p(x)$) $(0 \leq F(x) \leq 1)$

Exemple :

Soit X la variable aléatoire qui caractérise le résultat de l'expérience aléatoire "jet d'un dé homogène".

X est une variable aléatoire discrète, elle peut prendre les valeurs entières 1, 2, 3, 4, 5, et 6 avec la probabilité constante 1/6.

Distribution de probabilité de X

x	p(x)	F(x)
1	1/6	1/6
2	1/6	2/6
3	1/6	3/6
4	1/6	4/6
5	1/6	5/6
6	1/6	6/6
Total	1	

3. Variable aléatoire continue

Une variable aléatoire est continue si elle prend n'importe quelle valeur réelle appartenant à un intervalle donné.

Exemple :

Le poids est une variable aléatoire continue.

La taille est une variable aléatoire continue.

Un intervalle continu contient une infinité de valeurs. La probabilité d'obtenir exactement un résultat donné est généralement nulle, bien que ce résultat ne soit pas strictement impossible.

$p(x) = p(X = x) \approx 0$

La notion de distribution de probabilité n'a donc plus de sens dans le cas continu. Par contre la fonction de répartition conserve toute sa signification.

La fonction **f(x),** dérivée de **la fonction de répartition F(x),** est appelée **fonction de densité de probabilité**.

L'ensemble des valeurs admissibles pour une variable aléatoire continue et la fonction de densité de probabilité correspondante définissent une distribution de probabilité théorique continue.

Le produit f(x)dx est appelé élément de probabilité, c'est l'équivalent de la probabilité p(x) pour une variable aléatoire discontinue.

Pour une variable aléatoire continue, le cumul de la fonction de densité de probabilité est égal à 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple :

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour déterminer la constante k, il faut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_0^1 k \times dx = 1$$

$$k \times x \Big]_0^1 = 1$$

$$k = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit par intégration la fonction de répartition F(x) :

Si $x < 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \times dx = 0$$

Si $0 \leq x \leq 1$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \times dx + \int_0^x 1 \times dx = x$$

Si $x > 1$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \times dx + \int_0^1 1 \times dx + \int_1^x 0 \times dx = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Soit une variable aléatoire continue X définie par la fonction de densité de probabilité :

Exercice : Soit X une variable aléatoire à densité f définie par :

$f(x) = c\,x$ si $1 \leq x \leq 4$

$= 0$ sinon

a) Calculer la valeur de c.

b) Que vaut $P(1 \leq X \leq 2)$?

c) Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

4. Couples de variables aléatoires

Soit (Ω, P) un espace de probabilité, et soient X et Y deux variables aléatoires définies sur cet espace. Le couple (X, Y) définit ce que l'on peut appeler une variable aléatoire à valeurs dans R^2 : à tout ω de Ω, il associe en effet le vecteur (X(ω), Y(ω)).

La loi de (X, Y), souvent appelée loi conjointe de (X, Y), est déterminée par la donnée, pour tout sous-ensemble C de R^2, de la probabilité P ({(X, Y) ∈ C}).

On montre que la loi conjointe de (X, Y) est déterminée dès qu'on connaît P (X∈A et Y∈B) pour tout couple (A, B) de sous-ensembles de R. On montre aussi qu'il suffit pour cela de connaître la fonction de répartition F du couple (X, Y) qui est définie par :

$\forall (x, y) \in R^2 \quad F(x, y) = P(\{X \le x \text{ et } Y \le y\})$.

Remarquons que si la loi conjointe de (X, Y) est connue, on en déduit les lois de X et de Y, appelées dans ce contexte lois marginales. En effet, pour tout sous-ensemble A de :

{X∈A} = {X∈A et Y∈R} = {(X, Y) ∈A},

et on tire :

P (X∈A) = P ((X, Y) ∈A*R).

Exercice : Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi est telle que, si i et j sont deux entiers tels que $0 \le i \le 2$ et $-i \le j \le i$, P {(X, Y) = (i, j)} = 1/9.

a) Représenter graphiquement les valeurs prises par le couple (X, Y).

b) Quelle sont les lois marginales de X et Y ?

5. Variables aléatoires indépendantes

Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace de probabilité (Ω, P). On dit qu'elles sont indépendantes si pour tout couple (A, B) de sous-ensembles de R, les évènements {X∈A} et {Y∈B} sont indépendants, c'est-à-dire si :

P (X∈A et Y∈B) = P(X∈A) P(Y∈B) .

Exercice:

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi donnée par :

P {(X, Y) = (-1, 0)} = P {(X, Y) = (1, 0)} == P{ (X, Y) = (0, -1) } = P{ (X, Y) = (0, 1) } = 1/4.

X et Y sont-elles indépendantes ?

Proposition : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace de probabilité (Ω, P), de fonctions de répartitions F_X et F_Y . X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour tout couple (x, y) de réels : $P(X \le x \text{ et } Y \le y) = F_X(x)\, F_Y(y)$

6. Exercices

Exercice 1 : On équipe un local souterrain de 5 ampoules électriques. On suppose que les durées de vie de ces ampoules sont des variables aléatoires indépendantes, et de même densité f donnée par :

$$f(x) = \frac{200}{x^2} \text{ si } x > 200$$

$$= 0 \text{ sinon.}$$

On contrôle l'état des ampoules après 300 heures d'utilisation. Avec quelle probabilité deux (exactement) des ampoules sont-elles hors d'usage.

Exercice 2 : Une boîte contient 5 transistors, dont on sait que 3 sont défectueux. On teste l'un après l'autre les transistors et on les met de côté, jusqu'à avoir trouvé les défectueux. On note N1 le nombre de tests effectués pour trouver le premier transistor défectueux, et N2 le nombre de tests complémentaires effectués pour trouver le deuxième.

Décrire la loi conjointe de N1 et N2

IV- Caractéristiques d'une variable aléatoire

1. Esperance mathématique

1.1. Définition

On appelle espérance mathématique la valeur moyenne de la variable, elle remplace la moyenne arithmétique dans le cas d'une variable statistique.

Cas discret : $E(X) = \sum x \times p(x)$

Cas continu : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f(x)dx$

Exemple 1 :

- Soit X la variable aléatoire qui caractérise le nombre de garçons dans une famille de quatre enfants.

Distribution de probabilité de X

.

x	p(x)	F(x)
0	0,0625	0,0625
1	0,2500	0,3125
2	0,3750	0,6875
3	0,2500	0,9375
4	0,0625	1
Total	1	

$E(X) = \sum x \times p(x) = 0\times0{,}0625+1\times 0{,}2500+2\times0{,}3750+3\times0{,}2500+4\times0{,}0625$

$E(X) = 2$

Dans une famille de quatre enfants on doit s'attendre à avoir deux garçons.

Exemple 2 :

Soit une variable aléatoire continue X définie par la fonction de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^1 x \times dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

1.2. Propriétés

- L'espérance d'une fonction d'une variable X est :

Cas discret : E (g(X)) = $\sum g(x) \times p(x)$

Cas continu : E (g(X)) = $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \times f(x)dx$

Exemple :

Cas discret : E (X^2) = $\sum x^2 \times p(x)$

Cas continu : E (X^2) = $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f(x)dx$

Exercice 1 : Quelle est l'espérance de la variable aléatoire qui représente le nombre de points obtenus en lançant un dé ?

Exercice 2 : Dans chacun des deux cas suivants, calculer E(X), décrire la loi de X^2 et calculer E (X^2) :

a) P(X = -2) = 0,1   P(X = 1) = 0,6 P(X = 2) = 0,3

b) X à densité f définie par :

f(x) = 1/2 si $-1 \le x \le 1$

= 0 sinon

Proposition : Soient X et Y deux variables aléatoires sur un espace de probabilité (Ω, P), et soient a et b deux réels. Alors :

E (aX+b) = aE(X) + b

E(X+Y) = E(X) + E(Y)

Exercice 1 : Montrer les deux égalités de cette proposition dans le cas où les lois de X et Y sont discrètes.

Exercice 2 : On lance deux dés, et on note S la variable aléatoire qui représente la somme des points obtenus. Quelle est l'espérance de S ?

2. Variance

Exemple : Considérons les quatre variables aléatoires :

X1 = 0, c'est-à-dire la variable "aléatoire" constante et nulle,

X2 de loi uniforme sur [-1, 1]

X3 de loi uniforme sur [-100, +100]

X4 telle que P(T=-3000) = 1/2 P(T=2000) = P(T=4000) = 1/4

Elles ont toutes quatre pour espérance 0, mais leurs lois sont clairement différentes. Une caractéristique qui les distingue est l'étalement, la dispersion, des valeurs qu'elles prennent autour de leur valeur moyenne E(Xi) = 0. Une façon de mesurer cette dispersion est de regarder la valeur moyenne de la distance entre Xi et E(Xi). Pour des raisons pratiques, on préfère choisir la valeur moyenne du carré de la distance entre Xi et E(Xi), qu'on appelle la variance.

Définition : Soit X une variable aléatoire sur un espace de probabilité (Ω, P). La variance ν(X) de X est :

$$\mathbf{\nu (X) = E\,[(X - E(X))^2\,]}$$

L'écart-type σ(X) de X est : $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{\nu(X)}}$

Exercice 1 : Soit X une variable aléatoire.

Montrer que : $\mathbf{\nu(X) = E(X)^2 - [E(X)]^2}$

Exercice 2 : On lance un dé, et on note X la variable aléatoire qui représente le nombre de points obtenus. Quelle est la variance de X ?

Proposition : Soit X une variable aléatoire.

a) La variance de X est nulle si et seulement si il existe un réel c tel que P(X=c) = 1. On dit alors que X est presque sûrement constante.

b) Soient a et b deux réels. Alors : $\nu(aX+b) = a^2\nu(X)$ $\sigma(aX+b) = a\,\sigma(X)$

- Variable centrée réduite

Une variable aléatoire est dite centrée si son espérance mathématique est nulle, elle est dite réduite si son écart-type est égal à 1.

Toute variable aléatoire peut être transformée en une variable centrée réduite par le changement de variable $\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$

3. Covariance

Introduisons la définition de la covariance de X et Y :

$$\text{cov}(X, Y) = E\,[(X - E(X))\,(Y - E(Y))]$$

Proposition : Soient X et Y deux variables aléatoires sur (Ω, P). Si X et Y sont indépendants, alors :

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

$$\nu(X+Y) = \nu(X) + \nu(Y)\,.$$

Pour montrer ce résultat, on commence par montrer que si X et Y sont indépendantes, E(XY) = E(X) E(Y), et conclut en remarquant que sous cette même hypothèse, les variables aléatoires (X - E(X)) et (Y - E(Y)) sont indépendantes, ou encore en montrant l'égalité cov(X, Y) = E(XY) - E(X) E(Y).

Une caractéristique souvent utilisée en statistiques est un coefficient appelé **coefficient de corrélation** de deux variables aléatoires X et Y. C'est par définition, - et si ni X ni Y n'est presque sûrement constante - :

$$\boldsymbol{\rho\ (X,\ Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}}\ .$$

Remarquons que c'est un coefficient sans dimension.

On peut montrer par des méthodes classiques en analyse que :

$-1 \leq \rho\ (X, Y) \leq 1$

ρ (X, Y) = 1 si et seulement si il existe **a > 0** et b réel tel que **Y = aX + b**

ρ (X, Y) = -1 si et seulement si il existe **a < 0** et b réel tel que **Y = aX + b**

Méfions-nous cependant : le fait que le coefficient de corrélation de X et Y est nul ne signifie pas du tout que X et Y sont indépendantes (…qu'il n'y a pas de corrélation entre X et Y…). Prenons par exemple une variable X de loi symétrique par rapport à 0 (par exemple de loi uniforme sur [-1, 1]), et posons Y = X2 . La loi de XY = X3 est aussi symétrique par rapport à 0. Ainsi, E(XY) = 0 = E(X) E(Y), et donc ρ (X, Y) = 0.

Pourtant, X et Y ne sont pas (du tout) indépendantes, puisqu'au contraire, la donnée de la valeur prise par X détermine complètement la valeur prise par Y.

4. Exercices

Exercice 1 : Les transistors fournis par une usine sont défectueux dans la proportion p. On teste un transistor après l'autre jusqu'à en obtenir un bon. On note N le nombre de tests effectués. Quelle est la loi de N ? Calculer l'espérance de N.

Exercice 2 : Une machine est constituée de n sous-unités identiques. Elle fonctionne si toutes ses sous-unités fonctionnent. Le procédé de construction des sous-unités est tel qu'elles sont défectueuses dans la proportion p, et indépendamment les unes des autres.

Pour construire une machine sans défaut, deux procédés sont envisagés :

a) On construit une sous-unité, on la teste, si elle est bonne, on la monte, sinon, on la jette, etc… On continue jusqu'à avoir monté les n sous-unités de la machine. On suppose pour simplifier qu'il n'y a pas de problème de montage. La machine ainsi construite est donc bonne.

b) On construit et monte sans les tester n sous-unités, et on teste la machine ainsi constituée. Si elle ne marche pas, on la jette, et on recommence jusqu'à obtenir une bonne machine.

On note : cu le coût de construction d'une sous-unité,

tu le coût du test d'une sous-unité,

tm le coût du test d'une machine,

et on suppose pour simplifier que le coût d'assemblage des unités est nul.

1) On note C le coût de construction d'une bonne machine. Calculer l'espérance de C dans les deux cas a) et b).

2) On suppose tu = tm = cu/2 , et n = 10 (puis n = 100). Suivant la valeur de p, quel est le procédé de fabrication qui est préférable ?

V- Lois usuelles

Le but des lois théoriques est la description des phénomènes statistiques dont le but de calculer la probabilité de certains événements et donc d'avoir une certaine représentation de l'avenir.

Nous étudierons au cours de ce paragraphe les lois de probabilités les plus courantes qui vont nous permettre la description d'un phénomène aléatoire déterminé. Nous présenterons ainsi la loi de Bernoulli, la loi binomiale, la loi uniforme, la loi exponentielle, la loi hypergéométrique, la loi de poisson et la loi normale.

1. Loi de Bernoulli β(p)

La loi de Bernoulli intervient dans le cas d'une seule expérience aléatoire à laquelle on associe un événement aléatoire quelconque.

La réalisation de l'événement au cours de cette expérience est appelée succès et la probabilité de réalisation est dite probabilité de succès, désignée par p. Par contre la non-réalisation de l'événement est appelée échec et la probabilité de non-réalisation est dite probabilité d'échec, désignée par q.

La variable aléatoire X qui caractérise le nombre de succès au cours d'une seule expérience aléatoire est appelée variable de Bernoulli, elle prend les valeurs entières 0 et 1 avec les probabilités respectives q et p.

Loi de probabilité d'une variable Bernoulli

x	p(x)
0 1	q P
Total	1

Les caractéristiques d'une variable Bernoulli sont :

- **Espérance mathématique :** E(X) = p
- **Variance :** V(X) = pq

Exemple :

On lance une pièce de monnaie une seule fois. Soit X la variable aléatoire qui caractérise le nombre de piles obtenues. X est une variable de Bernoulli, elle prend les valeurs entières 0 et 1 avec la probabilité constante 0,5.

Loi de probabilité de X

x	p(x)
0	0,5
1	0,5
Total	1

2. Loi binomiale β(n, p)

La loi binomiale intervient dans le cas de plusieurs expériences aléatoires identiques et indépendantes aux quelles on associe un événement aléatoire quelconque.

La réalisation de l'événement au cours de chacune des expériences est appelée succès et la probabilité de réalisation est dite probabilité de succès, désignée par p. Par contre la non-réalisation de l'événement est appelée échec et la probabilité de non-réalisation est dite probabilité d'échec, désignée par q (q = 1 - p).

Les probabilités p et q restent constantes au cours d'une suite d'expériences aléatoires. C'est le cas des prélèvements d'individus au hasard dans une population infinie ou le prélèvement d'individus dans une population finie, lorsque les individus sont remis en place au fur et à mesure des prélèvements.

La variable aléatoire X qui caractérise le nombre de succès au cours de n expériences aléatoires indépendantes est appelée variable binomiale, elle prend les valeurs entières de 0 à n.

La probabilité d'obtenir x succès et donc (n-x) échecs au cours de n expériences aléatoires indépendantes est, pour x = 0, 1, ..., n :

$$p(x) = C_n^x p^x q^{n-x}$$

La loi binomiale dépend de deux paramètres :

- **n** = nombre d'expériences aléatoires indépendantes ;
- **p** = probabilité de succès au cours de chacune des n expériences aléatoires, p doit rester constante.

Une variable aléatoire X qui sui une loi binomiale de paramètres n et p, est désignée par :

$$\mathbf{X = \beta(n, p)}$$

Plus généralement, la loi binomiale $\boldsymbol{\beta}$**(n, p)** est la loi d'une somme X de n variables aléatoires indépendantes suivant chacune la même loi de Bernoulli $\boldsymbol{\beta}$**(p)**. C'est aussi le nombre de réalisations d'un évènement A lors de l'exécution de n expériences aléatoires indépendantes, le résultat de chacune réalisant A avec la probabilité p.

- **Espérance mathématique**

En appliquant la propriété de l'espérance d'une somme on peut écrire :

$E(X) = E(X1 + X2 + \dots + Xn)$

$E(X) = E(X1) + E(X2) + \dots + E(Xn)$

$E(X) = p + p + \dots + p$

$\mathbf{E(X) = np}$

- **Variance et écart-type**

En appliquant la propriété de la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes on peut écrire :

$V(X) = V(X1 + X2 + \dots + Xn)$

$V(X) = V(X1) + V(X2) + \dots + V(Xn)$

$V(X) = pq + pq + \dots + pq$

$\mathbf{V(X) = npq}$

- **Ecart type :**

$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{npq}}$

Exercice 1: On lance 4 fois un dé. On note X le nombre de fois où on obtient 6.

a) Pour k = 0, 1, 2, 3, 4, calculer P(X = k).

b) On note Xi la variable de Bernoulli qui vaut 1 si on tire un 6 au i-ième lancer, 0 si on ne tire pas 6 à ce lancer. Ecrire X en fonction des Xi , et en déduire la valeur de E(X) et de v(X).

Exercice 2: Dans un lot important de pièces, dont 10 % sont défectueuses, on prélève un échantillon de 20 pièces. Quelle est la probabilité d'obtenir plus de deux pièces défectueuses ?

3. Loi hypergéométrique

La loi hypergéométrique intervient dans le cas de plusieurs expériences aléatoires dépendantes aux quelles on associe un caractère étudié quelconque.

La probabilité de succès varie d'une expérience aléatoire à l'autre. C'est le cas des prélèvements d'individus au hasard dans une population finie, lorsque les individus ne sont pas remis en place au fur et à mesure des prélèvements.

Désignons par N l'effectif total de la population dans laquelle on prélève au hasard et sans remise n individus. La population est composée d'individus qui possèdent le caractère étudié, le nombre de ces individus sera désigné par n1. n2 désigne le nombre d'individus de la population qui ne possèdent pas le caractère étudié.

$$N = n1 + n2$$

La variable aléatoire X, qui caractérise le nombre d'individus prélevés qui possèdent le caractère étudié, est appelée **variable hypergéométrique**, elle prend les valeurs entières de 0 à n.

La probabilité d'obtenir x individus possédant le caractère étudié parmi les n individus prélevés et donc (n-x) individus ne possédant pas le caractère étudié est, pour x = 0, 1, ..., n :

$$p(x) = \frac{C_{n_1}^{x} C_{n_2}^{n-x}}{C_N^n}$$

La loi hypergéométrique dépend de trois paramètres :

- **N** = effectif total de la population ;
- **n1** = nombre d'individus de la population qui possèdent le caractère étudié ;
- **n** = nombre d'individus prélevés sans remise.

Une variable aléatoire X qui sui une loi hypergéométrique de paramètres N, n1, et n est désignée par :

$$\mathbf{X = H\ (N, n1, n)}$$

Les distributions hypergéométriques possèdent des propriétés semblables à celles des distributions binomiales.

La proportion des individus de la population qui possèdent le caractère étudié est :

$$p = \frac{n1}{N}$$

La proportion des individus de la population qui ne possèdent pas le caractère étudié est :

$$p = \frac{n2}{N}$$

- **Espérance mathématique : E(X) = np**
- **Variance et: V(X) =** $\frac{N-n}{N-1}$ **npq ;**
- **écart-type :** $\sigma(X) = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ **npq**

Exemple :
Dans une population de 40 personnes, dont 6 personnes sont originaires du Sud, 14 du Nord, 12 de l'Est et 8 de l'Ouest, on choisit au hasard un échantillon de 4 personnes.
La variable aléatoire X désigne le nombre d'individus de l'échantillon qui sont originaire du Nord.
La population étant finie et les prélèvements s'effectuent sans remise, la variable X suit donc une loi hypergéométrique de paramètres :

- N = effectif total de la population = 40
- n1= nombre d'individus de la population qui sont originaires du Nord = 14
- n = nombre d'individus prélevés sans remise = 4

La distribution de cette variable est telle que, pour x = 0, 1, 2, 3, 4 :

$$p(0)=\frac{C_{14}^{0}C_{26}^{4}}{C_{40}^{4}}=0{,}1636 \qquad p(2)=\frac{C_{14}^{2}C_{26}^{2}}{C_{40}^{4}}=0{,}3236$$

$$p(1)=\frac{C_{14}^{1}C_{26}^{3}}{C_{40}^{4}}=0{,}3983 \qquad p(3)=\frac{C_{14}^{3}C_{26}^{1}}{C_{40}^{4}}=0{,}1036$$

$$p(4)=\frac{C_{14}^{4}C_{26}^{0}}{C_{40}^{4}}=0{,}0110$$

Distribution de probabilité de X

x	p(x)
0	0,1636
1	0,3983
2	0,3236
3	0,1036
4	0,0110
Total	1

La proportion des individus de la population qui sont originaires du Nord est :

p=14/40=0,35

La proportion des individus de la population qui ne sont pas originaires du Nord est :

q=26/40=0,65

- Espérance mathématique : E(X) = np = 4 × 0,35 = 1,4
- Variance et écart-type : $V(X) = \frac{N-n}{N-1}\,npq = \frac{40-4}{40-1}\,4\times 0{,}65\times 0{,}35 = 0{,}84$

- Ecart type : $\sigma(X) = \sqrt{0,84} = 0,92$

4. Loi uniforme

La loi uniforme sur intervalle [a, b] de est la loi de densité f :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{si } a \leq x \leq b$$
$$= 0 \quad \text{sinon.}$$

$$\mathbf{E(X)} = \frac{a+b}{2} \qquad \mathbf{v(X)} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exercice: Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur [0, 1].

a) Calculer directement E(X) et v(X).

b) On pose Y = a + (b-a) X . Que valent E(Y) et v(Y) ? Quelle est la loi de Y ? Qu'en conclut-on ?

5. Loi de poisson

La loi de poisson intervient pour des phénomènes statistiques dont le nombre de réalisation varie de 0 à l'infini et dont la fréquence moyenne de réalisation est connue.

Exemple :

Nombre d'appels reçus par un standard téléphonique.

Nombre d'accidents de la circulation.

Nombre de visiteur d'un centre commercial.

La variable aléatoire X qui caractérise le nombre de réalisations de ce phénomène est appelée variable de poisson, elle prend les valeurs entières 0,1, 2, …etc.

La probabilité d'obtenir x réalisations est, pour x = 0, 1, 2, ... :

$$\mathbf{p(x)} = \frac{e^{-m}}{x!} \times m^x$$

La loi de poisson dépend d'un seul paramètre :

- **m =** fréquence moyenne du phénomène étudié.

Une variable aléatoire X qui suit une loi de poisson de paramètre m est désignée par :

$$X = P(m)$$

On peut démontrer que l'espérance mathématique d'une variable de poisson est égale à sa variance est égale au paramètre m :

$$\mathbf{E(X) = V(X) = m}$$

Exemple :

Un port a les moyens techniques de recevoir au maximum 4 bateaux pétroliers par jour. Le reste est envoyé vers un autre port. Quelle est la probabilité qu'un jour donné, le port ne puisse recevoir tous les bateaux qui se présentent, si on sait qu'en moyenne 3 bateaux se présentent par jour.

Désignons par la variable aléatoire X, le nombre de bateaux qui se présentent un jour donné.

X suit une loi de poisson de paramètre 3.

$$X = P(3)$$

La probabilité qu'un jour donné, le port ne puisse recevoir tous les bateaux qui se présentent est :

$P(X > 4) = 1 - p(X \leq 4) = 1 - p(0) - p(1) - p(2) - p(3) - p(4)$

6. Loi exponentielle

Soit λ un paramètre strictement positif. La loi exponentielle de paramètre λ est la loi de densité f définie par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{si } x \geq 0$$
$$= 0 \quad \text{sinon .}$$

Si X suit cette loi :

$E(X) = 1/\lambda$ $\qquad$ $v(X) = 1/\lambda^2$

7. Loi normale $n(\mu, \sigma)$

2.1. Définition

La loi normale est la loi continue la plus importante et la plus utilisée dans le calcul de probabilité. Elle est aussi appelée loi de LAPLACE GAUSS1.

On appelle variable normale toute variable aléatoire continue X définie dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, par la fonction de densité de probabilité suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$$

m et σ sont des paramètres quelconques qui représentent respectivement la moyenne et l'écart type de la variable.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

La loi normale dépend de deux paramètres m et σ. Une variable aléatoire X qui suit une loi normale de paramètres m et σ est désignée par :

$$X = N(m, \sigma)$$

2.2. Loi normale réduite

On appelle variable normale réduite toute variable aléatoire normale Z de paramètres m = 0 et σ = 1.

Z = N (0, 1)

Une variable normale réduite est définie par la fonction de densité de probabilité suivante :

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

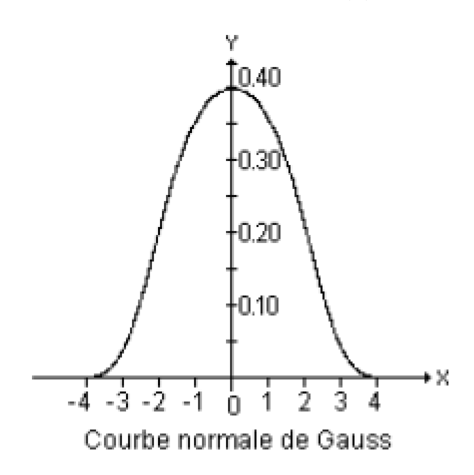
Toute variable normale X de paramètres m et σ peut être transformée en une variable normale réduite par le changement de variable suivant :

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

2.3. Forme de la loi normale

La représentation graphique de la fonction de densité de probabilité d'une variable normale est une courbe en forme de cloche symétrique par rapport à la moyenne m et caractérisée par l'existence d'un maximum en x = 0 et $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}}$.

En particulier la loi normale réduite est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et caractérisée par l'existence d'un maximum en z = 0 et f(z) = 0,40



Courbe normale de Gauss

La fonction de répartition correspond à l'aire comprise entre cette courbe et l'axe des abscisses.

2.4. Détermination pratique des probabilités

Pour le calcul de probabilités sans utiliser la fonction de densité, des tables de la loi normale réduite ont été élaborées. On distingue deux tables de la loi normale réduite, relatives l'une à

la fonction de densité de probabilité et l'autre à la fonction de répartition. En raison de la symétrie de la distribution, ces tables sont limitées aux valeurs positives de z.

Par le changement de variable $Z=\frac{X-m}{\sigma}$ toutes les variables normales se ramènent à la loi normale réduite.

Table de la fonction de répartition

Cette table donne les valeurs de la fonction de répartition π(z) pour des valeurs positives z d'une variable normale réduite. En raison de la symétrie de f(z), on peut déduire les valeurs

π (z) pour les valeurs négatives de z :

π (-z) = p(Z ≤ -z) = p(Z > z) = 1 - p(Z ≤z) = 1 - π (z)

π (-z) = 1 - π (z)

Pour une variable normale quelconque X de paramètre m et :

$F(z)=p(X\leq x)=p\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{x-m}{\sigma}\right)=p(Z\leq z)=\pi(z)$

F(x) = π(z)

Pour lire une valeur π(z) dans la table, il suffit de lire l'intersection entre la ligne correspondante à la valeur de z et la colonne correspondante au deuxième chiffre après la virgule de z.

Exemple :

Pour qu'une pièce fabriquée par une machine soit utilisable, sa longueur doit être comprise entre 14,7 et 15,3 cm, sinon elle est rejetée. Sachant que la longueur de cette pièce est une variable normale de paramètres 15 cm et 0,2 cm, quelle proportion de pièces peuvent être rejetées.

Si on désigne par la variable X la longueur des pièces, X suit une loi normale :

X = N (15 ; 0,2)

Calculer la probabilité de rejet d'une pièce.

2.5. Propriété d'additivité

La somme de deux ou plusieurs variables normales indépendantes est une variable normale de moyenne la somme des moyennes et d'écart type la racine carrée de la somme des variances des variables initiales.

Soient X1, X2, …,Xn n variables normales de paramètres respectivement m1, m2, …, mn et **σ** 1, **σ** 2, …, **σ** n

.

$$X_1+X_2+\ldots+X_n=N(m_1+m_2+\ldots+m_n, \sqrt{\sigma_1^{\,2}+\sigma_2^{\,2}+\ldots+\sigma_n^{\,2}})$$

Exemple : Pour se rendre à son travail un ouvrier prend deux bus. La durée du trajet du premier bus est une variable normale de paramètres 27 minutes et 5 minutes. La durée du trajet du deuxième bus est une variable normale de paramètres 30 minutes et 2 minutes. Quelle est la probabilité que cet ouvrier n'arrive pas en retard s'il dispose d'une heure ?

TABLE DE LA FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE REDUITE

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	05359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	05753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	06141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	06517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	06879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	07224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	07549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	07852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	08133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	08389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	08621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	08830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	090147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99897	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997

Exemple :

La valeur de π (1,36) correspond à l'intersection entre la ligne correspondante à 1,3 et la colonne correspondante à 0,06, on peut lire la valeur 0,91309.

π (-2,24) = 1 - π 2,24) = 1 - 0,98745 = 0,01255

8. Exercices

Exercice 1 : On a constaté que les disquettes produites dans une usine sont défectueuses avec une probabilité 0,01 indépendamment les unes des autres. L'usine conditionne ses disquettes par boîtes de 10, et offre à l'acheteur le remboursement d'une boîte dès qu'au moins deux des 10 disquettes sont défectueuses. Dans quelle proportion les boîtes sont-elles renvoyées ? Si quelqu'un achète 3 boîtes, avec quelle probabilité renvoi-t-il exactement une boîte ? au moins une boîte ?

Exercice 2 : On a constaté que le nombre N de clients visitant par jour le magasin d'un tapissier suit une loi de Poisson de paramètre 4, et que chaque client passe une commande 29 avec la probabilité 0,1 . On note C le nombre de commandes passées par jour. Quelle est la loi de C ? Enoncer un résultat plus général.

Exercice 3 : Le diamètre (exprimé en cm.) des tomates livrées à une usine d'emballage américaine suit une loi normale $(7, \sigma)$, où σ est inconnu. Un tri automatique rejette toutes les tomates dont le diamètre n'est pas compris entre 6cm et 8 cm.

a) On constate que 10% des tomates livrées sont rejetées par ce procédé de tri. Calculer l'écart type σ.

b) Le directeur veut réduire à 5% le pourcentage de tomates rejetées lors du tri. Ne pouvant agir sur les livraisons, il installe un système de tri qui rejette les tomates de diamètre inférieur à (7-s) ou supérieures à (7+s). Calculer s.

Exercice 4 : On a constaté qu'en absence d'épidémie, la variable aléatoire qui représente le poids d'un poulet de 81 jours pris au hasard dans un élevage des Landes suit une loi normale (1,8, 0,2), et que les poulets se développent indépendamment. On note X la moyenne arithmétique des poids de 100 poulets pris au hasard. Avec quelle probabilité a-t-on $(1,79 < X < 1,81)$? Même question en remplaçant 100 par 1000 poulets